Decanteerproblemen in een Heraklesweek

[Hans Schipper]

De Heraklesweek

Mijn school, het Baudartius College in Zutphen, organiseert al enkele jaren in de herfst voor de tweede klassen gymnasium een *Heraklesweek*. Vakoverstijgend wordt dan met diverse werkvormen de mythologie van Herakles belicht.
Herakles trouwde met Megara en kreeg met haar twee zonen. Door toedoen van Hera werd hij op een dag door waanzin getroffen en vermoordde zijn vrouw en kinderen. Om zichzelf te redden van de wraakgodinnen moest hij in dienst treden van koning Eurystheus van Mycene en alle taken verrichten die hij opgedragen kreeg. In opdracht van Eurystheus moest Herakles tien onmenselijk zware werken verrichten. Omdat hij bij één van die werken (het doden van de Hydra) hulp had gekregen van iemand anders, en voor een ander werk (het schoonmaken van de Augiasstal) betaald werd, moest hij nog twee extra werken verrichten.
We gebruiken het thema van de twaalf werken als kapstok: op twee dagen worden de leerlingen, in groepjes van tien, gesteld voor twaalf uitdagingen. Niet het wurgen van een veelkoppige waterslang of het vangen van een hinde met gouden horens en bronzen hoeven, niet het verschalken van een zwijn, noch het weerstaan van een reus met drie hoofden, drie bovenlijven en zes armen hebben dan de aandacht, maar wel uitdagingen van taalkundige, wiskundige, aardrijkskundige, mentale of sportieve aard. De Augiasstal moet wél geveegd, aan het einde van de dag.

Wiskundige uitdagingen

In dit artikel wil ik het vooral over een van de wiskundige uitdagingen hebben. Om de lezer een beeld te geven van het karakter van de andere problemen die de leerlingen tegenkomen, noem ik er een paar.
De aardrijkskundige uitdaging behelst een plaatsnamenspel. De mentale uitdaging is het met een groep van tien leerlingen opbouwen van een reusachtige buizententent. De sportieve uitdagingen bestaan uit bunkertrefbal en een spel met blokken, waarin twee teams tegen elkaar door hechte samenwerking zo snel mogelijk een stapel blokken van de ene kant van de gymnastiekzaal naar de andere kant moeten brengen. Geloof me: dat valt niet mee!
En dan zijn er vier wiskundige uitdagingen: één komt uit de cryptologie, één is gebaseerd op een Kangoeroewedstrijd, één bestaat uit het maken van sudoku's in allerlei soorten en maten, en de vierde wordt gevormd door een twintigtal 'giet- en verdeelproblemen'.
Toen ik mij enkele jaren geleden gesteld zag voor de uitdaging de wiskundige onderdelen te bedenken, ben ik onder andere op het internet gaan speuren. Daar stuitte ik op de site *www.creatievepuzzels.com* met giet- en verdeelpuzzels.
Op de homepage klikt men op *Rekenpuzzels* en daar aangeland (onderaan) op *Gieten en Verdelen*. Urenlang puzzelplezier ontvouwt zich.
Gestart wordt met het oerprobleem op dit gebied dat volgens Jorge L. Ramirez Alfonsin in zijn boek *The Diophantine Frobenius Problem* bij de zestiende-eeuwse Italiaanse wiskundige Tartaglia vandaan komt. Tartaglia (***zie figuur 1***) is wereldberoemd geworden met zijn oplossing van de derdegraads vergelijking die volgens hem gestolen werd door Cardano. Over de verwikkelingen die daarop volgden, zou een opera geschreven kunnen worden. Maar dat is een ander verhaal; terug naar de site.
Ik citeer:
'Je hebt drie containers. Een acht liter container is vol water. Een drie liter container en een vijf liter container zijn leeg. Verdeel het water in twee gelijke delen, zonder gebruik te maken van andere containers.'
Met een druk op de knop ziet men de oplossing.
Het voorbeeld staat ook in het onvolprezen boek van Fred. Schuh: *Wonderlijke problemen, leerzaam tijdverdrijf door puzzle en spel.*
Hij schrijft:
'Men heeft drie maten van 8, 5 en 3 liter. De grootste maat is geheel met wijn (!) gevuld, de twee andere maten zijn leeg. Door overgieten wil men bereiken dat de

figuur 1 Nicolò Tartaglia (1499-1557)

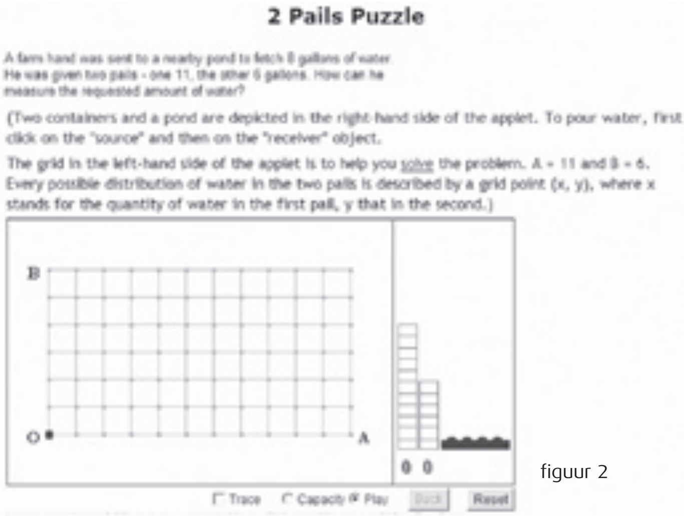
wijn in twee gelijke delen verdeeld wordt (waarbij dus de kleinste maat leeg is).
De maten zijn niet verdeeld, zodat men niet anders kan doen dan wijn van de ene maat naar de andere gieten totdat de eerste helemaal leeg of de tweede helemaal vol is. We nemen aan, dat het overgieten nauwkeurig kan plaatsen vinden en dat dus niet gemorst wordt. Gevraagd wordt naar het kleinste aantal overgietingen, waarin het doel bereikt wordt.'
De uitwerking noteert Schuh in een diagram, waarbij hij en passant een tweede oplossing zet [lees bijvoorbeeld 800 als 8, 0, 0; red.]:

$$800\left[\begin{array}{l}-350-323-620-602-152-143-440\\-503-530-233-251-701-710-413-440\end{array}\right.$$

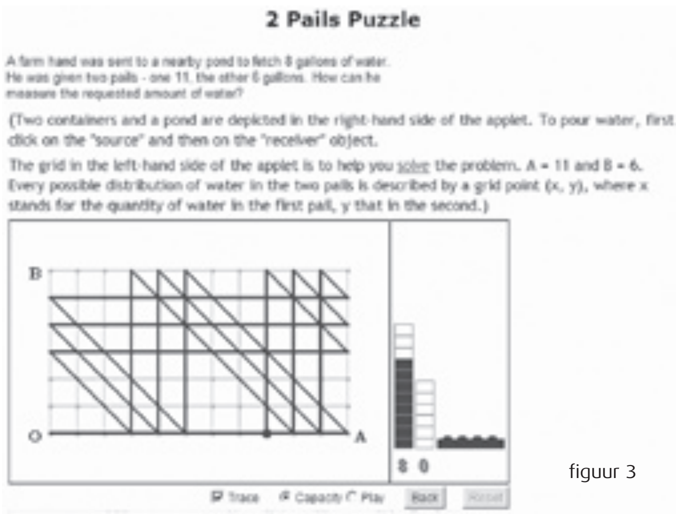
In een Amerikaanse uitgave van het boek, dat ooit is uitgebracht door uitgeverij Dover Publications, wordt 'overgietpuzzles' vertaald met 'decanting problems'. De associatie met wijn is dan snel gemaakt. 'Decanteren' wordt immers meestal gebruikt in de betekenis 'het overgieten van wijn vanuit een fles naar een karaf, zodat de droesem in de fles achterblijft'. Ik vind 'decanteerproblemen' veel mooier dan 'gieten en verdelen' problemen of 'overgietpuzzels'. Vandaar de titel, en vanaf nu zal ik 'decanteerproblemen' blijven gebruiken.

Decanteerproblemen

Toen ik het onderwerp decanteerproblemen voor het eerst als uitdaging in de Heraklesweek had ondergebracht, was ik zo gelukkig zelf het spel te mogen begeleiden. Met een lijst goede oplossingen stiekem in het borst-



figuur 2



figuur 3

zakje, om snel na te kunnen kijken, ontving ik de eerste groep. Ik gaf een korte toelichting en adviseerde een tabel te gebruiken. Nee, er was geen uitgewerkt voorbeeld. Die had Herakles in zijn tijd ook niet, ja toch? Men verviel in een afwachtende stilte die minuten lang duurde. Toen zei iemand: 'Weet ik veel.' Daarmee was de toon gezet en leek het lot over de puzzel beslist.
Omdat, door gebrek aan menskracht, ik tegelijkertijd ook nog een andere uitdaging moest begeleiden, kwam ik er pas even later weer aangezeild om suggesties aan te reiken en opmerkingen te plaatsen van opmonterende aard. Schoorvoetend werd er wat gepuzzeld, maar de *flow* kwam er niet echt in.
De tweede groep bracht de zonneschijn waaraan ik na deze regenbui zo toe was. Na dezelfde korte uitleg nam Lotte, één van mijn beste leerlingen, het voortouw en loste in een mum van tijd het makkelijkste decanteerprobleem op, waarna ze de overige verdeelde onder de leden van de groep met de uitroep: 'En nu even tegen elkaar.' Een fanatiek werken was het gevolg (***zie foto 1***), waardoor van de dertig aangereikte problemen er zeker vijftien werden opgelost. De volgende vier groepen vertoonden gedragingen die tussen de uitersten van de eerste twee inlagen. Er was steeds, in mindere of meerdere mate, sprake van samenwerken en taken verdelen onder leiding van iemand die zichzelf ter plekke tot manager benoemde.
Na die try-out heb ik een en ander gestroomlijnd. De opgaven zijn nu met een keurige lay-out in een map verzameld en de begeleider wordt gevraagd enkele problemen voor te bespreken aan de hand van een bijgeleverde tekst. De leerlingen krijgen bovendien enkele papieren met lege tabellen, bij wijze van stappenplan.
Dit schooljaar ben ik in dit spel geen begeleider en maak ik van de gelegenheid gebruik om te observeren. Van tevoren heb ik me daar al op verheugd, want het observeren van de manier waarop leerlingen gezamenlijk tot een oplossing komen, is altijd interessant.
Mijn collega, Jan de Geus, die de uitdaging begeleidt, begint de sessie met een kort voorbeeld uit een film die ik straks nog zal noemen. Dan komt er een perfect gecoacht onderwijsleergesprek over het decanteerprobleem met kannen van 8, 5 en 3 liter, waarbij het doel is twee keer vier liter over te houden.
Nadat bij wijze van inleiding de reeks (8,0,0) – (5,0,3) – (5,3,0) – (2,3,3) op het bord is verschenen, zegt Isabel: 'Ja, dan doe je dus die van twee door de helft en dat doe je dan bij die twee drieën en dan heb je twee keer vier.'
Op deze zo welkome fout reageert Jan de Geus met: 'Door de helft, hoe doe je dat? Er staan immers geen maatstreepjes op!'
'Ik geloof dat ik het begin te begrijpen', roept Arnold. Maar daarna blijft hij stil.
De leraar: 'De twee bij de eerste drie gooien kan wel, maar heeft geen zin: Je hebt dan de twee kleine kannen vol en wat moet je dan? Eén van de drieën teruggooien bij de grootste brengt ons weer terug bij een vroegere situatie, dat schiet niet op. Wat blijft er over?'
Isabel: 'De tweede drie bij de eerste drie gooien.'
De leraar: 'Dat geeft dus (2,5,1).'
Andere leerling: 'Dat geeft nog steeds geen vier.'
De leraar: 'Welke stappen zijn mogelijk?'
Isabel: 'De twee bij de een.'


foto 1

Ander: 'Dan heb je de twee kannen van vijf en drie vol. Dat had je in het begin net zo goed meteen kunnen doen.'
Leraar: 'Wat ook kan is de een bij de twee. Dan heb je weer drie en vijf. Die hadden we al eerder, dus dat ligt niet zo voor de hand. Zullen we de vijf bij de twee maar eens proberen?'
Arnold: 'Dat geeft (7,0,1).'
Leraar: 'Juist. Hoe nu verder? De zeven naar de een heeft geen zin. Dan heb je weer (5,0,3). De zeven naar de nul levert weer (2,5,1). We kunnen wel de derde kan naar de tweede (gedeeltelijk) overgieten. Dus dat wordt (7,1,0). We zijn er bijna.'
Er volgt een stilte.
'De zeven naar de nul', klinkt het.
Dan prijkt er (4,1,3) op het bord en daarna (4,4,0).
Klaar!
'Moeten wij dat nou zelf kunnen?', zucht er een.
Maar Annejet verklaart, met een blik in de ogen die op aanvallen staat: 'Dit wil ik gewoon snappen!' En ze grijpt naar het pakketje met opdrachten.

In de film *Die Hard: With a Vengeance* wordt een twee-kannen-versie gebruikt. De helden John McClane en Zeus Carver, (gespeeld door Bruce Willis en Samuel L. Jackson) worden voor het probleem geplaatst om met het water uit een (onuitputtelijke) bron en met behulp van twee emmers van achtereenvolgens 5 gallon en 3 gallon precies 4 gallon water af te passen. Het exploderen van een bom kan alleen


foto 2

worden voorkomen door er precies 4 gallon water overheen te gooien. Dat moet ook nog binnen dertig seconden, maar John en Zeus weten van wanten. Het zal niemand verbazen dat ze erin slagen het probleem op te lossen. Terwijl ze – schijnbaar achteloos – het nerveus voorttikken van de bom negeren, volgen ze het schema:

Liters (3, 5, 8)		
1.	8 to 5	(0, 5, 3)
2.	5 to 3	(3, 2, 3)
3.	3 to 8	(0, 2, 6)
4.	5 to 3	(2, 0, 6)
5.	8 to 5	(2, 5, 1)
6.	5 to 3	(3, 4, 1)
7.	3 to 8	(0, 4, 4)

De mentale en fysieke uitputting is ***van foto 2*** af te lezen.
Wiskundepuzzels zijn niet voor watjes!

Interessante wiskunde

Als de tweedeklassers met trial, error en een beetje nadenken een flink aantal van deze problemen aankunnen, ben ik allang tevreden. Er is veel interessante wiskunde bij te bedenken, die dan – jammer genoeg – onbesproken blijft.

Op de machtig leuke site *www.cut-the-knot.org* staat een applet waarmee de oplossing van het twee-kannen-probleem, in het geval de inhouden 11 en 6 bedragen, door middel van een grafiek kan worden gevisualiseerd. Het probleem heet dan *Two pails puzzle* en voor de verandering speelt het zich af in agrarische sferen (***zie figuur 2***; bron: *www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml).*

Met beurtelings klikken op de kolommen en het golfje, dat als onuitputtelijke bron fungeert, lukt het de gevraagde hoeveelheid af te passen. Vinkt men *Trace* aan, dan wordt in het rooster het pad getekend dat naar de oplossing leidt. Je krijgt dan iets als ***in figuur 3***.

Goed kijken naar onderstaande tabel levert de volgende observaties:

	Kan A	Kan B
Capaciteit	11	6
Start	0	0
Stap 1	11	0
Stap 2	5	6
Stap 3	5	0
Stap 4	0	5
Stap 5	11	5
Stap 6	10	6
Stap 7	10	0
Stap 8	4	6
Stap 9	4	0
Stap 10	0	4
Stap 11	11	4
Stap 12	9	6
Stap 13	9	0
Stap 14	3	6
Stap 15	3	0
Stap 16	0	3
Stap 17	11	3
Stap 18	8	6
Stap 19	8	0

- Stap 1 (11 gallon), stap 7 (10 gallon), stap 13 (9 gallon), stap 19 (8 gallon) geven het langzaam dalen van de inhoud van Kan A weer.
- Iedere 6 stappen daalt het vloeistof niveau in Kan A met 1.
- Dan lijkt het er toch op dat in Kan A ieder gewenst eindstadium 1 tot en met 11 gallon kan worden bereikt met geduldig overgieten volgens dit schema!

Deze vaststelling motiveert om nóg eens een voorbeeld (met inhoud A = 17 en B = 6) te bekijken:

	Kan A	Kan B
Capaciteit	17	6
Start	0	0
Stap 1	17	0
Stap 2	11	6
Stap 3	11	0
Stap 4	5	6
Stap 5	5	0
Stap 6	0	5
Stap 7	17	5
Stap 8	16	6
Stap 9	16	0
Stap 10	10	6
Stap 11	10	0
Stap 12	4	6
Stap 13	4	0
Stap 14	0	4
Stap 15	17	4
Stap 16	15	6
Stap 17	15	0
Stap 18	9	6
Stap 19	9	0
Stap 20	3	6
Stap 21	3	0
Stap 22	0	3
Stap 23	17	3
Stap 24	14	6
Stap 25	14	0
Stap 26	8	6
Stap 27	8	0
Stap 28	2	6
Stap 29	2	0
Stap 30	0	2
Stap 31	17	2
Stap 32	13	6
Stap 33	13	0

Na enkele van dit soort uitwerkingen kan men tot de volgende stelling komen:

Stelling. *Als zijn gegeven een onuitputtelijke waterbron en twee kannen met inhouden A en B (in hele liters), waarbij A en B onderling priem zijn en A > B is, dan kan iedere hoeveelheid Q (in hele liters) met* $0 \le Q \le A$ *worden afgemeten.*

Geïnspireerd door een bewijs voor het drie-kannen-probleem op *www.cut-the-knot.org* zou ik me hier willen wagen aan een bewijs van de hierboven vermelde stelling.

Begin met (0, 0) en schep dan A vol uit de onuitputtelijke bron. Dat geeft $(A, 0)$.

Schenk met behulp van A de kleinste kan vol. Dat geeft $(A - B, B)$.

Giet de kleinste leeg; resultaat: $(A - B, 0)$.

Herhaal dit proces: $(A - 2B, B)$ en daarna $(A - 2B, 0)$.

Herhaal dit proces q_1 maal totdat $0 < A - q_1B < B$. Dat kan omdat A en B onderling priem zijn. Dit geeft $(A - q_1B, 0)$ en daarna $(0, A - q_1B)$.

Giet vervolgens de grootste kan weer vol: $(A, A - q_1B)$, en dan weer uit de grootste naar de kleinste: $(A - (B - (A - q_1B)), B)$.

Dit is hetzelfde als: $(2A - B - q_1B, B)$.

Na het leeggieten van B levert dat op: $(2A - B - q_1B, 0)$, wat overeenkomt met: $(2A - (q_1 + 1)B, 0)$.

Omdat $A - q_1B < B$ geldt:

$2A - (q_1 + 1)B =$

$= A - q_1B + A - B < B + A - B = A$

Dus in de grootste zit nu een geheel aantal liters minder. We gaan verder en schenken de tweede kan weer vol:

$(2A - (q_1 + 1)B - B, B)$,

dus

$(2A - (q_1 + 2)B, B)$.

Giet de kleine weer leeg:

$(2A - (q_1 + 2)B, 0)$.

Herhaal dit proces q_2 keer, totdat:

$2A - (q_1 + 1)B - q_2B < B$

Dit geeft $(2A - (q_1 + 1)B - q_2B, B)$ en dus $(2A - (q_1 + 1)B - q_2B, 0)$ en daarna:

$(0, 2A - (q_1 + 1)B - q_2B)$

Daarna de grootste weer vol:

$(A, 2A - (q_1 + 1)B - q_2\mathrm{B})$, en dan weer van de grootste naar de kleinste:

$(A - (B - (2A - (q_1 + 1)B - q_2B)), B)$.

Dit is hetzelfde als: $(3A - (q_1 + q_2 + 2)B, B)$.

Omdat:

$3A - (q_1 + q_2 + 2)B = A + 2A - (q_1 + 1)$
$B - q_2B - B < A + B - B = A$

zit er in de grootste nu een geheel aantal liters minder dan in het begin. En niet evenveel als bij $2A - (q_1 + 1)B$, want:

$3A - (q_1 + q_2 + 2)B =$

$= (\ 2A - (q_1 + 1)B\ ) + (\ A - (q_2 + 1)B\ )$

En $A - (q_2 + 1)B$ is niet gelijk aan 0, omdat A en B relatief priem zijn.

Dit proces kan men A keer herhalen en steeds levert dit volumina op die kleiner zijn dan A en onderling ongelijk.

Te bewijzen is nu voor willekeurige $n < A$: na de $(n + 1)$ste uitvoering van deze procedure zit in de grootste kan minder dan A.

Nu is:

$(n + 1)A - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n + n)B =$

$= A + nA - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + 1)\ B +$
$- q_nB - B < A + B - B = A$

Bovendien zijn de volumina verschillend; immers, voor $j = 1, 2, 3, \ldots, A$ geldt:

$(n + 1)A - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n + n)B =$

$= (\ nA - (q_1 + q_2 + \ldots + q_j + j - 1)B\ ) + (\ A - (q_{i+1} + \ldots + q_n + n - j + 1)B\ )$

En de laatste term is weer niet gelijk aan 0 omdat A en B relatief priem zijn.

Op het gevaar af dat het bewijs wellicht nog een zekere strengheid mist, geloof ik nu wel dat herhaald uitvoeren van de procedure volumina in de grootste karaf oplevert met waarden: 1, 2, 3, 4, …, A.

Besluit

In Amerikaanse literatuur is veel over decanteerproblemen te vinden. Zo komen bij het drie-kannen-probleem barycentrische coördinaten om de hoek kijken en wordt bij bewijzen modulo-rekenen ingezet. Ook wordt wel Excel gebruikt om een en ander zichtbaar te maken. Wiskunde om van te smullen!

Men kan decanteerproblemen behandelen op puzzelniveau, maar er kan ook worden uitgebreid naar stevige wiskunde. Volgens een verhaal in *Mathematics and the Imagination* van E. Kasner and J. Newman, heeft de grote wiskundige Siméon Denis Poisson (1781-1840) zijn interesse in de wiskunde te danken aan een toevallig onder ogen krijgen van een decanteerprobleem. Wie weet hoever Annejet ('Dit wil ik gewoon snappen.') nog komt.

Met dank aan Jan de Geus.

Literatuur

- *Gieten en verdelen, te downloaden op: www.creatievepuzzels.com/spel/speel1/speel2/water.htm* (geraadpleegd op 28 oktober 2009).
- Jorge L. Ramirez Alfonsin (2005): *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford: Oxford University Press.
- Dr. Fred. Schuh (1943): *Wonderlijke problemen, leerzaam tijdverdrijf door puzzle en spel:* Zutphen: W.J. Thieme & Cie.
- John McTiernan (1995): *Die Hard: With a Vengeance* (film). New York: Cinergi Pictures Entertainment Inc.
- Bonnie Averbach, Orin Chein (2000): *Problem Solving Through Recreational Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Alex Bogomolny (2000): *The Three Jugs* Problem. Te downloaden op: *www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml* (geraadpleegd op 28 oktober 2009).
- H.S.M. Coxeter, S. L. Greitzer (1967): *Geometry revisited*. Washington: The Mathematical Association of America.

Meer over decanteerproblemen:

- *www.cut-the-knot.org/water.shtml* (geraadpleegd op 28 oktober 2009).

Lijst met URL's

- Tartaglia: *http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tartaglia-Opere-portrait.jpg*
- Antwoord van het eerste giet-en-verdeel-probleem via: *www.creatievepuzzels.com/spel/speel1/framned.htm*
- Bruce Willis: *http://i30.tinypic.com/fnreic.jpg*
- The two pails problem: *www.cut-the-knot.org/ctk/CartWater.shtml*
- Het bewijs voor het drie-kannen-probleem: *www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml*

Over de auteur

Hans Schipper is wiskundeleraar aan het Baudartius College te Zutphen.
E-mailadres: *h.schipper@baudartius.nl*