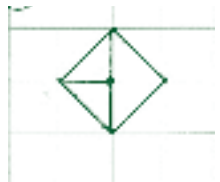
Doedelen

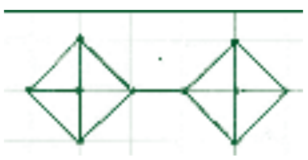
LEERLINGEN ONDERNEMEN SPONTAAN EEN WISKUNDIGE ONTDEKKINGSTOCHT

[Hans Schipper]

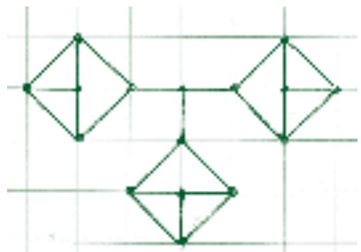
De oude Willem Drees noemt het in zijn memoires *doedelen*. Als hij zich tijdens een officieel banket weer eens verveelde, ging hij schier gedachteloos figuurtjes tekenen op een servet of ander papiertje dat hij toevallig in de buurt had.
Tegenwoordig hoor je wel het Engelse *doodle* en daarmee wordt min of meer hetzelfde bedoeld.
De Amerikaanse wiskundige van Poolse afkomst Stanislav Ulam brengt in 1963, al doedelend, met een eenvoudige spiraal een patroon bij de priemgetallen aan het licht.
Joost, een 14-jarige leerling van mijn school, heeft een keer een les niet erg interessant gevonden en is toen ook maar gaan doedelen.
Met een potlood heeft hij een tijd lang zo maar een beetje in zijn schrift zitten krassen en op een bepaald moment staat er deze figuur:



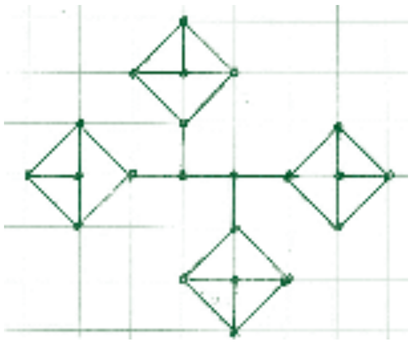
Hij kijkt er naar en ziet ineens: vanuit bíjna iedere punt vertrekken drie lijnstukken.
Is het mogelijk, vraagt hij zich af, om aan deze figuur lijnstukken en punten toe te voegen zodat vanuit íeder punt drie lijnstukken vertrekken?
Hij probeert wat, en dan heeft-ie hem, een halter:



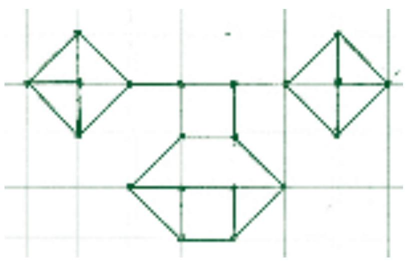
'Wat zit jij te doen?', fluistert Olivier.
'Ik probeerde een figuur te maken waarin vanuit ieder punt drie lijnstukken vertrekken', legt Joost uit.
'Mooi', vindt Olivier. Hij opent zijn wiskundeschrift en begint ook te krassen.
Als de leraar even later hun aandacht eist is het even afgelopen. Maar de volgende les gaat het verder.
'Is deze goed?', vraagt Olivier.



'Mmmja. Goedgekeurd', vindt Joost. Dan tikt Geert Joost op zijn rug en vraagt: 'Wat doe jíj nou?' Waarop ook Geert fluisterend in het geheim wordt ingewijd.
Ze zijn in deze les zelfstandig aan de slag en mogen samenwerken, dus een beetje overleg valt niet op, ook al gaat het niet over aardrijkskunde. Dat kan worden uitgebuit. Geert gaat aan de slag. Even later geeft hij een briefje door aan Olivier en Joost: 'Zo iets?'

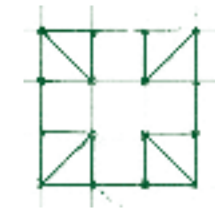


De beide jongeheren mompelen goedkeurende woorden. Deze figuur is blijkbaar inspirerend, want even later zegt één hunner: 'Zo kan het ook.' Hij bedoelt hier: Een figuur maken waarin in het midden een lijnstuk van drie centimeter staat en waarin vanuit ieder punt drie lijnstukken vertrekken.

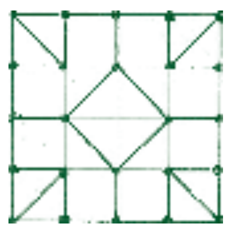


In de loop van de volgende weken ontstaat een veelheid aan figuren die allemaal voldoen aan de volgende eisen:
- Iedere figuur bestaat uit stippen en lijnstukken.
- Vanuit iedere stip vertrekken precies drie lijnstukken.
- Iedere stip staat op een roosterpunt.
- Een lijnstuk moet de zijde of de diagonaal van een roosterhokje zijn.
- Binnen een roosterhokje mag niet meer dan één diagonaal getekend worden.

Mijn zoon Koen, die bevriend is met de drie jongens, wordt ook in het geheime doedelgenootschap opgenomen.
Op een avond, als ik me door de correctie van een schoolexamen aan het worstelen ben, komt hij naar me toe en zegt: 'We doen op school een spel.'
'O', brom ik, want ik wil eigenlijk verder met nakijken.
'We geven elkaar opdracht om figuren te tekenen die er bijvoorbeeld zó uitzien', vervolgt hij, mijn gebrek aan enthousiasme negerend en hij tekent:

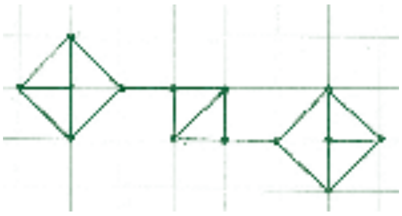


'Maar een vierkant van vier bij vier kan ook':

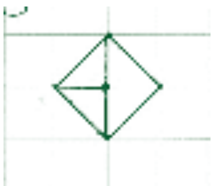


'Jaja', reageer ik, want het licht gaat nog niet bij me branden.
'Al die figuren voldoen aan spelregels', gaat hij door en hij noemt de regels die hierboven geschreven staan.
Spelregels … ik word wakker.

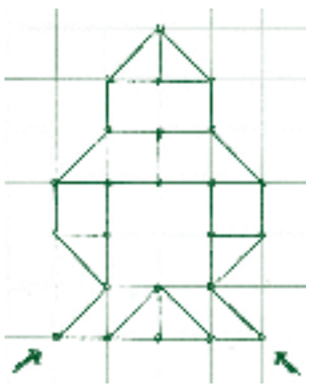
‘Als ik een roostervierkantje voor mijn neus krijg’, vraag ik, ‘en ik moet daar zo’n ding van maken … met drie lijnstukken en zo … hoe doe ik dat dan?’
Na enig nadenken verschijnt er:



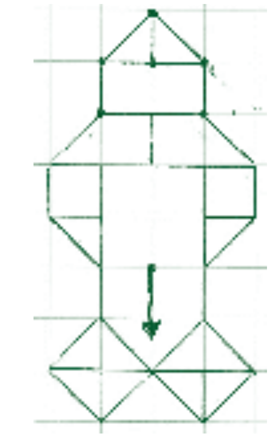
‘Die dingen …’, zegt Koen, en hij tekent:



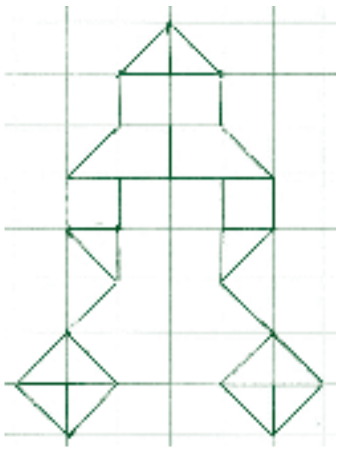
‘… zijn een soort van afsluiters, waarmee je iedere figuur, waarin bij één punt nog een lijnstuk ontbreekt, kunt afmaken’.
Ik kijk op mijn horloge en naar de stapel schoolexamens en zucht.
‘Ik moet eigenlijk verder’, zeg ik, ‘maar jouw spel is gewoon veel leuker’.
‘Het is niet mijn spel, hoor’, verbetert Koen, ‘Joost, Olivier en Geert hebben het bedacht. Nu doen ook anderen mee, waaronder ik’.
‘Het is ons nog niet gelukt om een poppetje te tekenen’, gaat hij onverdroten verder, vast van plan mij voor zijn spel te winnen nu hij een bres in mijn verdediging bespeurt.



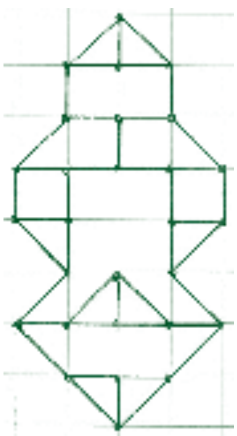
Hij tekent bovenstaande figuur.
‘Bij zijn tenen houdt het op. Daar komen maar twee lijnstukken bij een punt. Je kunt natuurlijk wel de tenen verbinden met een afsluiter, maar ja dan is het een poppetje met stomme voeten’.
‘En zo dan?’ zeg ik, de volgende schets makend.



Maar ik blijk nog slechts een amateur en streng zet Koen een pijl bij de fout.
Dat motiveert om verder te gaan. Na een beetje proberen heb ik dit:

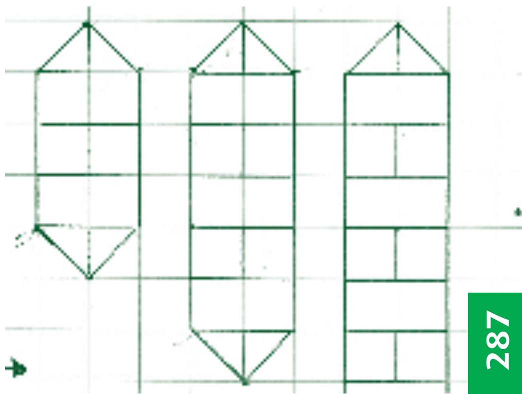


‘Dat bedoel ik dus met stomme voeten’, zegt Koen.
‘Dat is een kwestie van smaak’, breng ik er tegen in. ‘Maar ik vind wel dat het maag-darm-stelsel er wat luchtigjes bij ligt.’
‘Ik weet een mooiere’, zegt Koen en hij tekent onderstaande figuur: een mannetje op een tol.



Ondertussen ben ik een half uur verder en de stapel schoolexamens wordt niet kleiner.
‘Ik vind dit erg interessant’, zeg ik, ‘maar ik moet helaas verder met werken. De centen moet nu eenmaal verdiend worden. En jij moet trouwens ook aan je huiswerk’.
‘Mag ik er nog één laten zien?’
‘Nou, nee eigenlijk …’
‘Eén maar, toe??’
‘Vooruit dan maar weer’.

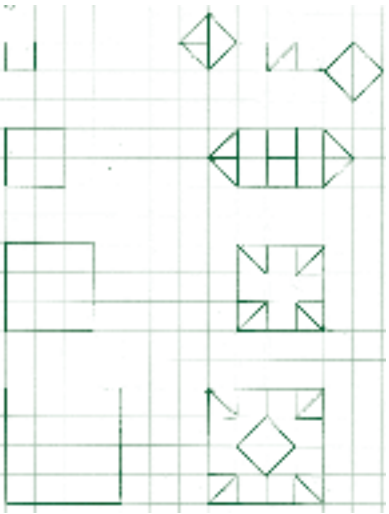
‘Dat is de kleinste die we tot nu toe ontdekt hebben. Je kunt hem oneindig ver uitbreiden, kijk maar’:

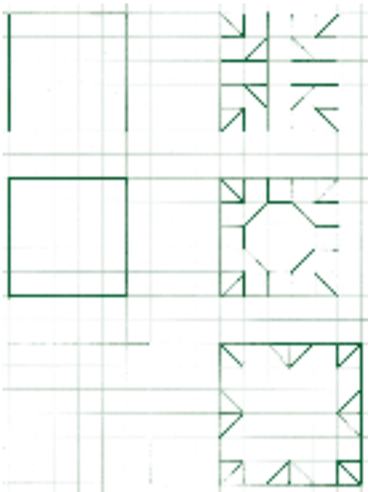


‘Zo, je hebt me er nu al weer vier laten zien in plaats van één. Nu wegwezen. Anders wordt het morgenochtend voordat ik klaar ben met dat nakijkwerk.’
Ik zet me weer aan de correctie, maar om de drie of vier kandidaten pak ik er even een kladblaadje bij om enkele nieuwe figuren te kunnen schetsen.
‘Wat zíjn het voor dingen?’ vraag ik me af.
‘Het zijn grafen, dat is duidelijk. Door de voorwaarden ontstaat er een deelverzameling. Kun je daarin klassen maken? Is er een efficiënte methode, die altijd werkt om een figuur te tekenen die bij een klasse hoort? Heeft het sowieso betekenis, of blijft het alleen een spelletje?’
Enkele dagen later doe ik, in een vrij moment, een poging figuren in kaart te brengen die uitgaan van de vierkanten met zijden 1, 2, 3, … De opdracht die ik me zelf geef is: Maak, met een minimaal aantal lijntjes, van de vierkanten met zijden 1, 2, 3, … figuren die voldoen aan de regels. *Doedels*, zal ik ze voorlopig maar even noemen.

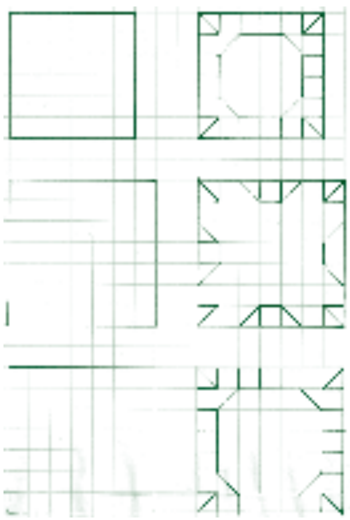
De opdracht is dan kortweg: Maak van vierkanten doedels, met een minimaal aantal lijntjes.

In de volgende afbeeldingen staan links de opdrachten, rechts de doedels.



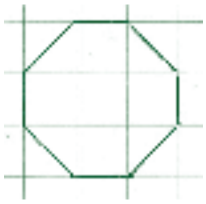


Van het vierkant van vijf bij vijf heb ik twee oplossingen opgenomen. De tweede is efficiënter. De eerste oogt fraaier, vind ik zelf.

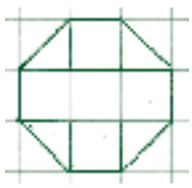


Hiervan kan een spel voor potlood en papier gemaakt worden. Twee spelers hebben beiden een stapel ruitjespapier en een potlood tot hun beschikking. Ze tekenen op elkaars blaadje een figuur, bijvoorbeeld een vierkant, waarvan een doedel moet worden gemaakt. Steeds krijgen ze maximaal 5 minuten om het plaatje af te maken.

Voorbeeld van een spelverloop. Speler 1 krijgt de opdracht:

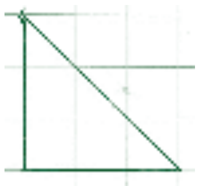


En hij maakt hiervan:

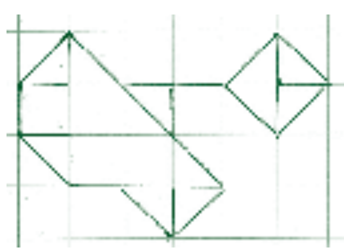


Speler 2 ziet geen efficiëntere oplossing; dus speler 1 krijgt een punt.

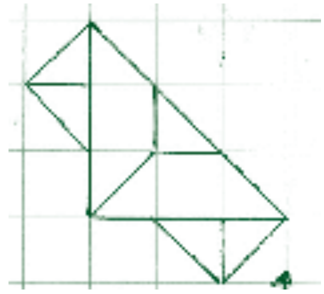
Speler 1 krijgt de volgende opdracht. Enzovoorts.
Speler 2 krijgt de opdracht:



Speler 2 maakt hiervan:



Maar speler 1 ziet een efficiëntere oplossing:



Dus speler 1 krijgt een punt. Enzovoorts.

Na de uitleg door mijn zoon heb ik contact gezocht met Joost, Olivier en Geert. Ze zijn trots door mijn interesse, maar gelukkig gaan ze er al snel grappen over maken, zoals: 'Dat wordt dan de stelling van Olivier Thagoras'.
Wat ik zo bijzonder aan bovenstaand verhaal vind, is dat zomaar, spontaan, een spel ontstaat. Drie jongens zijn vervolgens in staat om spelregels te formuleren voor het maken van toch behoorlijk abstracte figuren. Het spel ontwikkelt zich vervolgens op een wijze zoals die door Bert van Oers geformuleerd is in *Spel en de ontwikkeling van het mathematiseren*:
'(…) vanuit een Vygotskiaanse optiek is spel een manier waarop een activiteit wordt (of mag worden) uitgevoerd. Spel is dus eigenlijk een aanduiding voor het *format* van een activiteit. Het spelformat van een activiteit voldoet aan de volgende kenmerken:
a. er is sprake van *regels*;
b. er is sprake van *intrinsieke betrokkenheid* bij de activiteit (het kind kiest zelf voor het spel of besluit zelf of het daaraan deelneemt en hoe lang; juist door dit gegeven heet het spel 'spontaan');
c. er is sprake van *vrijheidsgraden* (de speler heeft altijd tot op zekere hoogte de vrijheid in de keuze van handelingen, doelen, objecten of instrumenten om de deelname aan het spel vorm te geven).
Juist dit format geeft de speler de ruimte om zijn eigen versie te maken van de activiteit waaraan hij deelneemt, zolang deze maar niet in strijd is met de regels die expliciet of impliciet voor het spel gedefinieerd zijn. En precies dit is wat kenmerkend is voor spel en wat spel productief en vernieuwend kan maken. Het is de voortdurende balans tussen vrijheid en gebondenheid aan regels.'

In het ontstaan van het doedelspel, zoals ik dat hierboven beschreven heb, zie ik de volgende aspecten:
- De leerlingen onderzoeken een wiskundige structuur.
- Het spel is creatief.

- De regels zijn opgesteld na analyse en synthese.
- Het spel wordt ontwikkeld door er over te communiceren.
- Er is sprake van affectie: de vriendenclub vindt het prettig om op deze manier met wiskunde bezig te zijn.

Zo, gratis en voor niks, zijn leerlingen intensief met wiskunde bezig. Nou ja, gratis … er is steeds bij allerlei vakken, waaronder wiskunde, een stukje van de lestijd afgesnoept. Maar daarvoor krijgen we dan ook wat terug.

Ondertussen wordt er al lang niet meer gedoedeld, maar gestructureerd gezocht. Nog lang niet alle figuren zijn ontdekt. Ze zijn nog niet in categorieën ondergebracht. Het spel ontwikkelt zich nog steeds. Op dit moment proberen de jongens figuren te bedenken die lijken op mannetjes, hoofden, voorwerpen, …
Ze komen vast een keer met een betere naam dan *doedel* voor deze figuren.
Ik ben benieuwd hoe het verder gaat.

Literatuur

- Willem Drees (1962): *Zestig jaar levenservaring*. Amsterdam: Arbeiderspers.
- Bert van Oers: *Spel en de ontwikkeling van het mathematiseren*. Te downloaden via: *http://home.planet.nl/~oers0054/TEKST spel & mathematiseren.pdf* (geraadpleegd op 20 april 2010).
- Lev Vygotsky (1933): *Play and its role in the Mental Development of the Child*. Te downloaden via: *http://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1933/play.htm* (geraadpleegd 20 april 2010).
- Wikipedia: *The Ulam spiral*. Te downloaden via: *http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral* (geraadpleegd op 20 april 2010).

Over de auteur

Hans Schipper is wiskundeleraar aan het Baudartius College te Zutphen.
E-mailadres: *h.schipper@baudartius.nl*

Gauß en de Grootste Gemene Deler

[Rob Bosch]

In het vorige nummer (Euclides 85(6), mei 2010) vond u een reactie van Rob Bosch op een artikel van Hans Schipper over decanteerproblemen. In die reactie liet Bosch zien dat een decanteerprobleem alles te maken heeft met de grootste gemene deler van de volumes van de vaten.
In het voor u liggende artikel laat de auteur zien hoe in een simpel 'breukenlesje' deze ggd heel natuurlijk opduikt, en beargumenteert hij waarom het goed zou zijn om in een les over breuken aandacht te besteden aan de ggd van twee getallen.

Inleiding

Aan het begin van een collegecyclus analyse besteed ik enige tijd aan het ophalen en uitbreiden van elementaire algebraïsche vaardigheden. Een oefening die de meeste studenten goed kunnen gebruiken omdat deze vaardigheden in de technische vakken nu eenmaal steeds weer nodig zijn. Tot de cursus algebraïsche vaardigheden behoort inmiddels ook een herhaling van rekenvaardigheden – met name het omgaan met breuken – want ook die vaardigheid laat te wensen over. Het gehannes met de lenzenformule ($\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$) en het niet kunnen berekenen van een vervangingsweerstand voor een parallelschakeling ($\frac{1}{R_v}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$) laat zien dat zo'n rekencursus geen overbodige luxe is.[1] Het gebrek aan algebraïsche en rekenvaardigheden is nog steeds onderwerp van discussie. Ik ga daar nu niet op in, maar wil in het onderstaande laten zien wat een verrassende wending een simpel lesje vereenvoudigen en optellen en aftrekken van breuken kan nemen. De titel van dit stukje laat al enigszins zien in welke richting dat gaat.

De grootste gemene deler

Bij het werken met breuken (vereenvoudigen, optellen en aftrekken, enz.) komen we de *grootste gemene deler* (ggd) en het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) op een natuurlijke manier tegen; de ggd bij het vereenvoudigen van breuken en het kgv bij het optellen en aftrekken van breuken. De volgende reeks vereenvoudigingen leidt bijvoorbeeld tot de ggd van de teller en de noemer van de eerste breuk:

$$\frac{60}{132}=\frac{30}{66}=\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$$

We hebben hier de teller en noemer van de breuken achtereenvolgens gedeeld door 2, 2 en 3. Zoals we eenvoudig nagaan, is de laatste breuk in de rij niet verder te vereenvoudigen. De gegeven breuk is derhalve zover mogelijk vereenvoudigd en bij die vereenvoudiging hebben we de ggd van 60 en 132 gevonden. De ggd is gelijk aan het product van de vereenvoudigingsfactoren; dat wil zeggen:
ggd(60, 132) = 2·2·3 = 12
Om de eerste breuk zover mogelijk te vereenvoudigen moeten we de teller en de noemer van die breuk delen door de ggd van de teller en de noemer; hier dus door ggd(60, 132) = 12:

$$\frac{60}{132}=\frac{12\times 5}{12\times 11}=\frac{5}{11}$$

Zoals we zien verschijnt de grootste gemene deler op een natuurlijke manier bij het zover mogelijk vereenvoudigen van breuken. Het ligt dus voor de hand in lessen over breuken aandacht te besteden aan de ggd van twee (of meer) getallen.
Overigens is een bespreking van de ggd en het kgv, afgezien van de toepassing bij het manipuleren van breuken, zeer de moeite waard. Berekening van de ggd, door bijvoorbeeld de getallen in factoren te ontbinden, levert vaak een onverwacht resultaat op, en met behulp van het duizenden jaren oude *algoritme van Euclides* kunnen we de ggd van twee getallen vaak verrassend snel berekenen. Kortom, de ggd en het kgv zijn aardige onderwerpen die inzicht verschaffen in de structuur van de natuurlijke getallen.
In het vervolg werken we een opgave uit die bij de bespreking van de ggd aan de orde kwam.